



GIẢI TÍCH

Chương 4: SỐ PHỨC

Bài 4: CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC.

I Căn bậc hai của số thực âm.

II Phương trình bậc hai với hệ số thực.



BÀI TẬP MINH HỌA.

I Căn bậc hai của số thực âm

- +) b là căn bậc hai của số thực a âm khi : $b^2 = a$ ($a < 0$).
- +) Ta có: $a < 0 \Rightarrow a = i^2 \cdot |a|$
- +) **Vậy** căn bậc hai của số thực a ($a < 0$) là : $\pm i \sqrt{|a|}$

👉 Ví dụ: Tìm căn bậc hai các số sau: $-1; -2; -4; -9; -13; 0; 1; 4$.

Lời giải

👉 Các số trên viết lại là: $i^2 \cdot 1; i^2 \cdot 2; i^2 \cdot 4; i^2 \cdot 9; i^2 \cdot 13; 0; 1; 4$.
Suy ra: Căn bậc hai các số trên lần lượt là:
 $\pm i; \pm i\sqrt{2}; \pm 2i; \pm 3i; \pm i\sqrt{13}; 0; \pm 1; \pm 2$.

👉 **Nhận xét** : Nếu $a \geq 0$ thì các căn bậc hai của a là $\pm \sqrt{a}$

Nếu $a = 0$ thì căn bậc hai số 0 là 0.

Nếu $a < 0$ ($a = i^2 \cdot |a|$) thì các căn bậc hai của số thực a : $\pm i \sqrt{|a|}$

II Phương trình bậc hai với hệ số thực.

Ví dụ : Giải phương trình bậc hai sau trên tập số phức: $z^2 - 2z + 5 = 0$

Lời giải :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 = i^2 \cdot 16 ; (\Delta < 0).$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phức phân biệt:

$$z_1 = \frac{2+4i}{2 \cdot 1} = 1 + 2i ; z_2 = \frac{2-4i}{2 \cdot 1} = 1 - 2i.$$

👉 **Chú ý :** Phương trình bậc hai : $a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$ ($a \neq 0$) ($\Delta = b^2 - 4ac < 0$).

Có hai nghiệm phức phân biệt : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a} ; z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a}.$

+) Khi đó $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} ; z_1 \cdot z_2 = -\frac{c}{a} ; z_1 = \bar{z}_2.$

+) Hai số z_1, z_2 (nếu có) lần lượt có tổng là S, có tích là P thì là nghiệm của phương trình bậc hai sau: $x^2 - Sx + P = 0.$

II CÁC VÍ DỤ MINH HỌA.

1. Câu hỏi lí thuyết về phương trình trên tập $\mathbb{C}$.



Ví dụ 1:

Tìm nghiệm của phương trình sau trên tập hợp số phức :

$$a) -x^2 + 4 = 0$$

$$b) x^2 + 2x + 10 = 0.$$



Bài giải

$$a) \text{ Ta có: } -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm 2i.$$

$$b) \text{ Ta có : } \Delta' = -9 = i^2 \cdot 9; (\Delta < 0).$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phức phân biệt : } \begin{cases} x = -1 + 3i \\ x = -1 - 3i. \end{cases}$$

2. Tính toán biểu thức các nghiệm.



Ví dụ 2:

Trên tập hợp số phức. Gọi z_1, z_2 (z_1 là số phức có phần ảo âm) lần lượt là nghiệm của phương trình sau trên tập hợp số phức :

a) $-x^2 + 1 = 0$. Tính $|z_1 + 2z_2|$

b) $x^2 - 2x + 5 = 0$. Tìm mô đun của số phức: $2z_1 - z_2 - i$



Bài giải

$$a) -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -i \\ z_2 = i \end{cases} \Rightarrow |z_1 + 2z_2| = |-i + 2i| = |i| = 1$$

$$b) x^2 - 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 - 2i \\ z_2 = 1 + 2i \end{cases} \Rightarrow |2z_1 - z_2 - i| = |1 - 7i| = 5\sqrt{2}.$$

3. Ứng dụng định lý Viet vào các nghiệm



Ví dụ 3:

Cho các số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 2i$. Tìm phương trình bậc hai có các nghiệm z_1 , z_2 ?



Bài giải

Ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 6 \\ z_1 \cdot z_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow z^2 - 6z + 13 = 0$ là phương trình bậc hai cần tìm.

3. Ứng dụng định lý Viet vào các nghiệm



Ví dụ 4:

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình : $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Tìm giá trị của $z_1^2 + z_2^2$?



Bài giải

$$\text{Theo Viet : } \begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{3+6\sqrt{3}}{4}.$$

3. Ứng dụng định lý Viet vào các nghiệm



Ví dụ 5:

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình : $z^2 - z + 2 = 0$. Tìm phần thực của số phức $[(i - z_1)(i - z_2)]^{2020}$?



Bài giải

$$\text{Theo Viet : } \begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = 1 \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } [(i - z_1)(i - z_2)]^{2020} &= [z_1 z_2 - i(z_1 + z_2) - 1]^{2020} = (1 - i)^{2020}. \\ &= [(1 - i)^4]^{505} = (-4)^{2020} = 4^{2020} \end{aligned}$$

3. Biểu diễn hình học các nghiệm của phương trình trên mặt phẳng phức.



Ví dụ 1:

Trên tập hợp số phức cho phương trình $z^2 - 2z + 50 = 0$. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình (z_1 là số phức có phần ảo âm). Tìm điểm biểu diễn hình học của số phức $w = z_1 + 2z_2 - i$ trên mặt phẳng phức Oxy ?



Bài giải

$$\text{Ta có: } z^2 - 2z + 50 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 - 7i \\ z_2 = 1 + 7i \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } w = (1 - 7i) + 2(1 + 7i) - i = 3 + 6i.$$

$$\text{Vậy } M_w = (3 ; 6).$$

3. Biểu diễn hình học các nghiệm của phương trình trên mặt phẳng phức.



Ví dụ 2:

Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 2z + 2 = 0$. Tìm điểm biểu diễn hình học của số phức liên hợp của số phức $w = (1 + 2i)z_1$?



Bài giải

$$\text{Ta có: } z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -1 - i \\ z_2 = -1 + i \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } w = (1 + 2i)z_1 = 1 - 3i \Rightarrow \bar{w} = 1 + 3i.$$

$$\text{Vậy } M_{\bar{w}} = (1 ; 3).$$

4. Hệ phương trình số phức.



Ví dụ 1:

Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện : $|z - 1| = |z + 1| = \sqrt{5}$?



Bài giải

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} |z + 1| = \sqrt{5} \\ |z - 1| = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 1)^2 + b^2 = 5 \\ (a - 1)^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Vậy $z = \pm 2i$.

4. Hệ phương trình số phức.



Ví dụ 2:

Cho số phức z thỏa mãn $|z \cdot \bar{z} - z| = 2$ và $|z| = 2$. Số phức $w = z^2 - z - 3i$ bằng ?



Bài giải

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có:

$$\begin{cases} |z\bar{z} - z| = 2 \\ |z| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| \cdot |\bar{z} - 1| = 2 \\ |z| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\bar{z} - 1| = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 2 \Rightarrow w = 2^2 - 2 - 3i = 2 - 3i.$$

DẶN DÒ

1 Xem lại các dạng bài tập trên

2 Xem bài ÔN TẬP CHƯƠNG 4.